2.4 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ 30^o 45^o 60^o

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί 30^o , 45^o , 60^o :

	30^o	45^o	60^o
ημίτονο	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συνημίτονο	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφαπτομένη	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Στο διπλανό πίνακα, σε κάθε πληροφορία της στήλης Α, να επιλέξετε την σωστή απάντηση από τις στήλες Β , Γ, Δ, Ε για τη γωνία.

Α	Β	Γ	Δ	Ε
$ημω = \frac{\sqrt{3}}{2}$	30^o	(60^o)	45^o	90^o
$συνω = \frac{\sqrt{3}}{2}$	60^o	45^o	(30^o)	90^o
$εφω = 1$	30^o	(45^o)	60^o	90^o
$ημω = συνω$	(45^o)	60^o	30^o	90^o

Προτεινόμενη λύση

$ημω = \frac{\sqrt{3}}{2}$ άρα $ω = 60^o$ σωστό το Γ

$συνω = \frac{\sqrt{3}}{2}$ άρα $ω = 30^o$ σωστό το Δ

$εφω = 1$ άρα $ω = 45^o$ σωστό το Γ

$ημω = συνω$ άρα $ω = 45^o$ σωστό το Β

2.

Να χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες

α) $2ημ60^o = ημ45^o$ Λ

β) $2ημ30^o - 1 = 0$ Σ

γ) $3εφ60^o = εφ30^o$ Λ

δ) $ημ45^o = \sqrt{2}\,ημ30^o$ Σ

ε) $3συν45^o = 1$ Λ

στ) $2συν30^o - \sqrt{3} = 0$ Σ

Προτεινόμενη λύση

α)

$2ημ60^o = ημ45^o$ άρα $2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ άρα $2\sqrt{3} = \sqrt{2}$ η πρόταση είναι λάθος

β)

$2ημ30^o - 1 = 0$ άρα $2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$ άρα $1 - 1 = 0$ η πρόταση είναι σωστή

γ)

$3εφ60^o = εφ30^o$ άρα $3\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ άρα $9 = 1$ η πρόταση είναι λάθος

δ)

$ημ45^o = \sqrt{2}\,ημ30^o$ άρα $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\ \frac{1}{2}$ η πρόταση είναι σωστή

ε)

$3συν45^o = 1$ άρα $3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$ η πρόταση είναι λάθος

στ)

$2συν30^o - \sqrt{3} = 0$ άρα $2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = 0$ η πρόταση είναι σωστή

3.

Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων

α) $2ημ^2 30^o + 4\ ημ^2 45^o - 2ημ^2 60^o$

β) $εφ^2 30^o + εφ45^o - 3εφ^2 60^o$

γ) $συν^2 30^o + \sqrt{2}\ συν45^o - 3συν\ 60^o$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$2ημ^2 30^o + 4\ ημ^2 45^o - 2ημ^2 60^o = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{2}{4} - 2\cdot\frac{3}{4} = 1$$

β)

$$εφ^2 30^o + εφ45^o - 3εφ^2 60^o = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1 - 3(\sqrt{3})^2 =$$

$$= \frac{3}{9} + 1 - 9 = -\frac{23}{3}$$

γ)

$$συν^2 30^o + \sqrt{2}\ συν45^o - 3συν\ 60^o = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 3\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{3}{4} + 1 - \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$$

4.

Αν x είναι οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου, να βρείτε τη γωνία x στις παρακάτω περιπτώσεις

α) $4συν^2 x - 1 = 0$

β) $3εφx - \sqrt{3} = 0$

γ) $2ημx - \sqrt{2} = 0$

Προτεινόμενη λύση

α)

$4συν^2 x - 1 = 0$ άρα $συν^2 x = \frac{1}{4}$ άρα $συνx = \frac{1}{2}$ ή $συν\ x = -\frac{1}{2}$

$x = 60^o$ ή αδύνατη για οξείες γωνίες

β)

$3εφx - \sqrt{3} = 0$ άρα $εφx = \frac{\sqrt{3}}{3}$ οπότε $x = 30^o$

γ)

$2ημx - \sqrt{2} = 0$ άρα $ημx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ οπότε $x = 45^o$

5.

Αν x είναι οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου, να βρείτε πότε έχουν νόημα αριθμού οι παραστάσεις

$A = \sqrt{1-2συνx}$, $B = \sqrt{\sqrt{3}-2ημx}$, $Γ = \sqrt{εφx-1}$

Προτεινόμενη λύση

Α)

Πρέπει $1-2συνx \geq 0$ άρα $2συνx \leq 1$ άρα $συνx \leq \frac{1}{2}$

$συνx \leq συν60^o$

$90 > x \geq 60^o$

Β)

Πρέπει $\sqrt{3}-2ημx \geq 0$ άρα $2ημx \leq \sqrt{3}$

$ημx \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$ημx \leq ημ60^o$

$0 < x \leq 60^o$

Γ)

$εφx-1 \geq 0$ άρα $εφx \geq 1$ άρα $εφx \geq εφ45^o$ άρα $0 > x \geq 45^o$

6.

Να αποδείξετε ότι

α) $συν\,60^o = συν^2 30^o - ημ^2 30^o$

β) $ημ60^o = 2ημ30^o συν30^o$

γ) $ημ30^o - εφ45^o = -συν60^o$

δ) $συν60^o + 2ημ^2 30^o = 1$

ε) $συν^2 45^o + 2ημ^2 60^o = 2$

στ) $ημ^2 45^o + συν60^o = 1$

Προτεινόμενη λύση

α)

$συν60^o = συν^2 30^o - ημ^2 30^o$ αρκεί $\frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ η οποία ισχύει

β)

$ημ60^o = 2ημ30^o συν30^o$ αρκεί $\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ ή

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ η οποία ισχύει

γ)

$\eta\mu 30^o - \varepsilon\varphi 45^o = -\,\sigma\upsilon\nu 60^o$ αρκεί $\dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{1}{2}$

$-\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$ η οποία ισχύει

δ)

$\sigma\upsilon\nu 60^o + 2\eta\mu^2 30^o = 1$ αρκεί $\dfrac{1}{2} + 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 1$

$\dfrac{1}{2} + 2\cdot\dfrac{1}{4} = 1$

$1 = 1$ η οποία ισχύει

ε)

$\sigma\upsilon\nu^2 45^o + 2\,\eta\mu^2 60^o = 2$ αρκεί $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 2$

$\dfrac{2}{4} + 2\cdot\dfrac{3}{4} = 2$

$2 = 2$ η οποία ισχύει

στ)

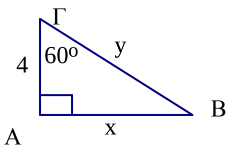
$\eta\mu^2 45^o + \sigma\upsilon\nu 60^o = 1$ αρκεί $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2} = 1$

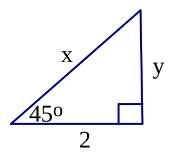
$\dfrac{2}{4} + \dfrac{1}{2} = 1$

$1 = 1$ η οποία ισχύει

7.

Χωρίς την χρήση πινάκων ή υπολογιστή τσέπης και χωρίς την χρήση του Πυθαγορείου θεωρήματος να υπολογίσετε τα μήκη x και y στα διπλανά σχήματα





Προτεινόμενη λύση

Στο πρώτο σχήμα έχουμε

$\sigma\upsilon\nu 60^o = \dfrac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}}$ άρα $\dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{\text{ΒΓ}}$ οπότε ΒΓ = 8

$\eta\mu 60^o = \dfrac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}}$ άρα $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{x}{8}$ οπότε $x = 4\sqrt{3}$

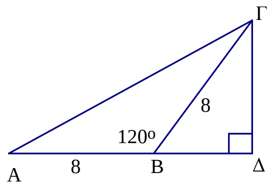
Στο δεύτερο σχήμα έχουμε

$\sigma\upsilon\nu 45^o = \dfrac{2}{x}$ άρα $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2}{x}$ οπότε $x = 2\sqrt{2}$

y = 2 επειδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές

8.

Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ και το εμβαδόν του.



Προτεινόμενη λύση

Είναι $\Gamma\hat{B}\Delta = 60^o$ ως παραπληρωματική της $A\hat{B}\Gamma$

$\eta\mu 60^o = \dfrac{\Gamma\Delta}{B\Gamma}$ άρα $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\Gamma\Delta}{8}$ οπότε $\Gamma\Delta = 4\sqrt{3}$

$\sigma\upsilon\nu 60^o = \dfrac{B\Delta}{B\Gamma}$ άρα $\dfrac{1}{2} = \dfrac{B\Delta}{8}$ οπότε $B\Delta = 4$

$A\Delta = AB + B\Delta = 8 + 4 = 12$

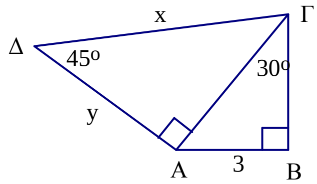
$$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Gamma\Delta^2 = 12^2 + (4\sqrt{3})^2 =$$
$$= 144 + 48$$
$$= 192 \text{ οπότε } A\Gamma = \sqrt{192}$$

Η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι $\Pi = AB + B\Gamma + A\Gamma = 8 + 8 + \sqrt{192} =$
$= 16 + \sqrt{192}$

Και το εμβαδόν $E = \dfrac{AB \cdot \Gamma\Delta}{2} = \dfrac{8 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$ τετραγωνικές μονάδες

9.

Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τα x και y.



Προτεινόμενη λύση

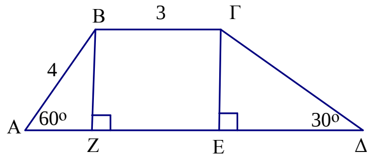
$\eta\mu 30^o = \dfrac{AB}{A\Gamma}$ άρα $\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{A\Gamma}$ οπότε $A\Gamma = 6$

Επειδή το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΓ έχει $\hat{\Delta} = 45^o$, είναι ισοσκελές. Επομένως $y = A\Gamma = 6$

$\sigma\upsilon\nu 45^o = \dfrac{y}{x}$ άρα $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{6}{x}$ οπότε $x = 6\sqrt{2}$

10 .

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του διπλανού τραπεζίου.



Προτεινόμενη λύση

$ημ60^o = \frac{BZ}{AB}$ άρα $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BZ}{4}$ οπότε $BZ = 2\sqrt{3}$

$συν60^o = \frac{AZ}{AB}$ άρα $\frac{1}{2} = \frac{AZ}{4}$ οπότε $AZ = 2$

$ημ30^o = \frac{ΓΕ}{ΓΔ}$ άρα $\frac{1}{2} = \frac{BZ}{ΓΔ}$ οπότε $\frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{ΓΔ}$ συνεπώς $ΓΔ = 4\sqrt{3}$

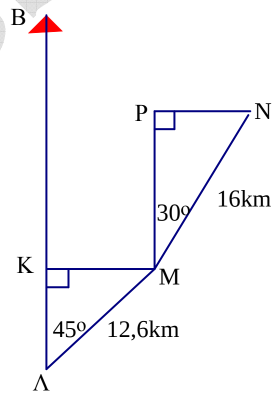
$συν30^o = \frac{ΔΕ}{ΓΔ}$ άρα $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{ΔΕ}{4\sqrt{3}}$ οπότε $ΔΕ = 6$

$AΔ = AZ + ZE + EΔ = 2 + 3 + 6 = 11$

$E = \frac{(AΔ + BΓ)BZ}{2} = \frac{(11+3)2\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}$ τετραγωνικές μονάδες

11.

Ένα πλοίο ξεκινάει από το λιμάνι Λ και ακολουθεί την πορεία ΛΜΝ. Να βρείτε πόσο βόρεια από το λιμάνι Λ είναι το πλοίο όταν αυτό βρίσκεται στη θέση Μ και πόσο ανατολικά όταν αυτό βρίσκεται στη θέση Ν.



Προτεινόμενη λύση

$συν45^o = \frac{KΛ}{ΛM}$ άρα $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{KΛ}{12,6}$ οπότε $KΛ = 6,3\sqrt{2}$

Δηλαδή το καράβι βρίσκεται $6,3\sqrt{2}$ km βόρεια από το λιμάνι Λ.

$ημ30^o = \frac{PN}{MN}$ άρα $\frac{1}{2} = \frac{PN}{16}$ οπότε $PN = 8$

Το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές αφού $\hat{Λ} = 45^o$.

Επομένως $KM = KΛ = 6,3\sqrt{2}$

Το πόσο ανατολικά βρίσκεται το καράβι όταν αυτό είναι στην θέση Ν, προκύπτει από το άθροισμα ΚΜ + ΡΝ.

Όμως $KM + PN = 6,3\sqrt{2} + 8$

Δηλαδή το καράβι βρίσκεται $8 + 6,3\sqrt{2}$ km ανατολικά από το λιμάνι Λ όταν αυτό είναι στην θέση Ν.

12.

Αν x οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου, να λυθούν οι εξισώσεις

α) $4\eta\mu^2 x - 3 = 0$ **β)** $4\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 = 0$ **γ)** $\varepsilon\varphi^2 x - 1 = 0$

Προτεινόμενη λύση

α)

$4\eta\mu^2 x - 3 = 0$ άρα $4\eta\mu^2 x = 3$

$\eta\mu^2 x = \dfrac{3}{4}$

$\eta\mu x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ή $\eta\mu x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$x = 60^o$ ή αδύνατη για οξείες γωνίες

β)

$4\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 = 0$ άρα $4\sigma\upsilon\nu^2 x = 1$

$\sigma\upsilon\nu^2 x = \dfrac{1}{4}$

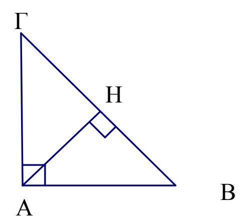
$\sigma\upsilon\nu x = \dfrac{1}{2}$ ή $\sigma\upsilon\nu x = -\dfrac{1}{2}$

$x = 60^o$ ή αδύνατη για οξείες γωνίες

γ)

$\varepsilon\varphi^2 x - 1 = 0$ …….$\varepsilon\varphi x = 1$ άρα $x = 45^o$

13.



Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα ΒΓ και ΑΗ το ύψος στη υποτείνουσα. Αν $\gamma = 25\sqrt{3}$ και $\alpha = 50$, να υπολογίσετε την πλευρά β, τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ και το ύψος ΓΗ.

Προτεινόμενη λύση

$\eta\mu\hat{\Gamma} = \dfrac{AB}{B\Gamma} = \dfrac{25\sqrt{3}}{50} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ άρα $\hat{\Gamma} = 60^o$ οπότε $\hat{B} = 30^o$

$\varepsilon\varphi\hat{\Gamma} = \dfrac{AB}{A\Gamma}$ άρα $\varepsilon\varphi 60^o = \dfrac{25\sqrt{3}}{A\Gamma}$

$\sqrt{3} = \dfrac{25\sqrt{3}}{A\Gamma}$

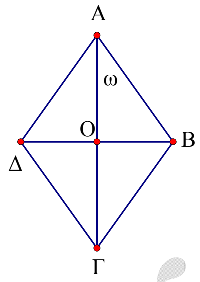
$A\Gamma = 25 = \beta$

$\eta\mu\hat{\Gamma} = \dfrac{AH}{A\Gamma}$ άρα $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{AH}{25}$ οπότε $AH = 12{,}5\sqrt{3}$

14.

Σε ένα ρόμβο ΑΒΓΔ είναι $\widehat{A} = 60^o$ και η διαγώνιος ΒΔ = 10 m. Να υπολογίσετε την πλευρά του ρόμβου και την άλλη διαγώνιο.

Προτεινόμενη λύση



Στο ρόμβο οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα, διχοτομούνται και διχοτομούν τις γωνίες του ρόμβου.

Άρα ΒΟ = 5m και $\widehat{\omega} = 30^o$

ημ$\widehat{\omega} = \dfrac{BO}{AB}$ άρα $\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{AB}$ οπότε ΑΒ = 10m

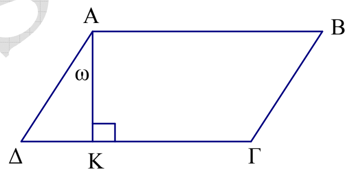
συν$\widehat{\omega} = \dfrac{AO}{AB}$ άρα $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{AO}{10}$ οπότε $AO = 5\sqrt{3}$ m

Επομένως $A\Gamma = 2OA = 10\sqrt{3}$ m

15 .

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ΑΔ = 8cm , ΑΒ = 20 cm και $\widehat{A} = 120^o$.
Να υπολογίσετε το ύψος ΑΚ και το εμβαδόν.

Προτεινόμενη λύση



Αφού $\widehat{A} = 120^o$ θα είναι $\widehat{\omega} = 30^o$

συν$\widehat{\omega} = \dfrac{AK}{A\Delta}$ άρα $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{AK}{8}$ οπότε $AK = 4\sqrt{3}$ cm

Και $E = AB\cdot AK = 20\cdot 4\sqrt{3} = 80\sqrt{3}\ cm^2$